

Espaces vectoriels normés [1/3]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



College of
Computing

Généralités

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

Étant donné un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on appelle norme sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **Homogénéité** : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$

- **Séparation** : $\forall x \in E$,

$$N(x) = 0 \implies x = 0.$$

- **Inégalité triangulaire** : $\forall (x, y) \in E^2$, on a

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Définition 2

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Dans la suite, si la notation de la norme de l'espace normé E n'est pas précisée, on utilisera la notation $\| \cdot \|$ par défaut.

Proposition 3

Soient x et y deux vecteurs d'un evn E . Alors, on a :

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x \pm y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Espace préhilbertien et norme euclidienne

Définition 4

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E , toute application **bilinéaire**

$$\langle ., . \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

étant,

- ❶ symétrique i.e. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
- ❷ positive i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geq 0$.
- ❸ définie i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien réel.

Soit E un espace préhilbertien réel. L'application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $x \longrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme appelée norme euclidienne. On note $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.

Proposition 5

Soit E un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$. Alors

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Proposition 6

La norme euclidienne est une norme.

Exercice 7:

- 1 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on pose $(x|y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$. Montrer que $(\mathbb{R}^d, (.|.))$ est un espace préhilbertien.
- 2 Pour tous $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Montrer que $(C([a, b], \mathbb{R}), (.|.))$ est un espace préhilbertien.

Exercice 8:

- ❶ Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\left| \sum_{i=1}^d x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- ❷ Montrer que, pour tous $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Normes usuelles

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Si x est un vecteur de $\mathbb{K}^n$, $(x_1, \dots, x_n)$ ses composantes, et l'on pose:

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|; \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

Proposition 9

Les trois applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Normes usuelles sur un evn de dim finie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur $x \in E$ on note x_k avec $k \in \{1, \dots, n\}$ les composantes de x dans $\mathcal{B}$ et on définit les trois applications suivantes :

$$\|x\|_{\infty, \mathcal{B}} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \|x\|_{1, \mathcal{B}} = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_{2, \mathcal{B}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

Proposition 10

Les applications $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{1, \mathcal{B}}$ et $\|\cdot\|_{2, \mathcal{B}}$ sont des normes sur E .

Normes usuelles sur l'espace des matrices

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right),$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right),$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Proposition 11

Les applications $\|\cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Normes usuelles sur l'espace des fonctions bornées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et X un ensemble non vide. Notons $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E .

Proposition 12

L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X, E) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty \end{aligned} \quad \text{où} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$, appelée norme infinie.

Normes usuelles sur l'espace des fonctions continues sur un segment

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$. On note $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions continues du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on peut alors définir:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt},$$

Normes usuelles sur l'espace des polynômes

Sur $\mathbb{K}[X]$, plusieurs normes classiques peuvent être considérées :

- **Normes définies à partir des coefficients:**

Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$; On peut alors définir:

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad \|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

- **Normes définies à partir des valeurs de la fonction polynomiale :**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On peut alors définir:

$$\|P\|_1 = \int_a^b |P(t)| dt, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt}, \quad \|P\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |P(t)|.$$

Proposition 13

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que p espaces vectoriels normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sur $\mathbb{K}$. L'application :

$$\begin{aligned}\varphi : E_1 \times \dots \times E_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \max(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p))\end{aligned}$$

est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$, appelée norme produit.

Distance associée à une norme

Définition 14

On appelle **distance** sur E toute application

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- ① $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$
- ② $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x).$
- ③ $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

On appelle alors (E, d) un **espace métrique**.

Proposition 15

Si $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé, alors l'application définie par $d(x, y) = ||x - y||$ définit une distance.

Distance à une partie

Dans tout ce chapitre, on considère que la distance associée à la norme de l'evn.

Définition 16

Étant donné une partie $A \subset E$ non vide ainsi que $x \in E$, on appelle **distance de x à A** , et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition 17

Soit $A \subset E$ non vide, et $x, y \in E$. On a

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Remarque: Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$. La réciproque est généralement fausse.

Définition 18

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

- **Boule ouverte** de centre a et de rayon r :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}.$$

- **Boule fermée** de centre a et de rayon r :

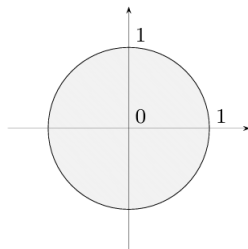
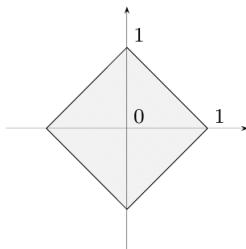
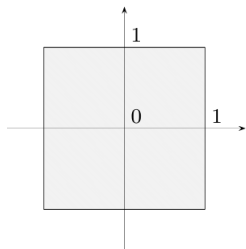
$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}.$$

- **Sphère** de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}.$$

Boule ouverte, Boule fermée, Sphère

Voici le dessin de la boule fermée unité dans $\mathbb{R}^2$, muni successivement des normes infinie, un et deux:



Parties convexes

Définition 19

Soient $a, b \in E$.

Le segment $[a, b]$ est la partie de E définie par :

$$[a, b] = \{ ta + (1 - t)b \mid 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Définition 20

Soient $a, b \in E$.

Soit A une partie non vide de E . A est dite **partie convexe** de E si et seulement si :

$$\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$$

Exemple 21:

- ① Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est convexe.
- ② Une boule ouverte ou fermée est convexe.
- ③ Une intersection quelconque de convexes est convexe.
- ④ Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition 22

Soit (a_n) une suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ ainsi que $l \in E$. On dit que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers l si la suite réelle $(\|a_n - l\|)_{n \geq 0}$ converge.

Proposition 23

Soit (a_n) une suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ ainsi que $l_1, l_2 \in E$. Si $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers l_1 et l_2 , alors $l_1 = l_2$.

Exercice 24: Dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, considérons la suite définie par $f_n(x) = x^n$. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ par la norme 1 et la norme ∞ .

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Proposition 25

Si (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent respectivement vers a et b , et si λ et μ sont deux scalaires, alors la suite de terme général $\lambda a_n + \mu b_n$ converge vers $\lambda a + \mu b$.

Proposition 26

Si (a_n) converge vers a , alors la suite de terme général $\|a_n\|$ converge vers $\|a\|$.

Proposition 27

Toute suite convergente est bornée.

Exercice 28: Soient $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ deux suites à valeurs dans l'espace $M_p(\mathbb{K})$. Soient A et $B \in M_p(\mathbb{K})$.

Montrer que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{tr}(A_n) = \operatorname{tr}(A)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \det(A_n) = \det(A)$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n B_n) = AB$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^k) = A^k$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^{-1} = A^{-1}$

Suite à valeurs dans un espace produit

Suites à valeurs dans un espace produit

Soient $(E_1, N_1), (E_2, N_2), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés. On peut munir $E_1 \times \dots \times E_p$ par la norme:

$$\|(x_1, \dots, x_p)\| = \max(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p)).$$

Proposition 29

La suite $(a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(p)}) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$ converge ssi pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $(a_n^{(k)})$ converge. Dans ce cas, en notant l_k la limite de $(a_n^{(k)})$ pour tout k , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(p)}) = (l_1, \dots, l_p).$$

Exercice 30: Considérons la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad X_n = \left(\frac{\cos(\ln(n))}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \right).$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Suites extraites, valeurs d'adhérence

Suites extraites, valeurs d'adhérence

Proposition 31

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Définition 32

On appelle valeur d'adhérence d'une suite (a_n) tout élément de E qui est limite d'une sous-suite de (a_n) .

Proposition 33

Soit (a_n) une suite à valeurs dans E . Un élément $x \in E$ est valeur d'adhérence de (a_n) ssi:

$$\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \geq 1, \exists n \geq n_0, \|a_n - x\| \leq \epsilon$$

Remarque: Une suite ayant une seule valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente.

Normes équivalentes

Définition 34

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \text{tels que} \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x), \quad \forall x \in E.$$

Remarque: On remarque que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x), \quad \forall x \in E,$
- 2) $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \quad \forall x \in E.$

Exercice 35: Montrer que les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Partie ouverte

Définition 36

Soit U une partie de E . On dit que U ouvert de E si:

$$\forall x \in E, \exists r > 0, B(x, r) \subset U.$$

Exemple 37:

- $\emptyset$ et E sont des ouverts de E .
- Si E n'est pas l'espace nul, Un singleton n'est pas ouvert de E .
- Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $] - \infty, b[$, $]a, b[$ ou $]a, +\infty[$, est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{C}$.

Le caractère ouvert ou non d'un ensemble n'est pas une notion intrinsèque à cet ensemble, mais dépend de l'espace dans lequel on le considère.

Proposition 38

Toute boule ouverte est ouverte.

Proposition 39

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.
- L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est ouverte.

Remarque: Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert.

Proposition 40

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit $E_1 \times \dots \times E_p$ de la norme produit. Si $O_1, \dots, O_p$ sont ouverts dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors $O_1 \times \dots \times O_p$ est ouvert dans $E_1 \times \dots \times E_p$.

Partie fermée

Définition 41

On dit qu'une partie de E est fermée, si son complémentaire est un ouvert de E .

Exemple 42:

- $\emptyset$ et E sont des fermés de E .
- Un singleton est un fermé de E .
- Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $] - \infty, b]$, $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$, est fermé dans $\mathbb{R}$.

Proposition 43

Une partie $A \subset E$ est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A .

Exemple 44: $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.

Proposition 45

Toute boule fermée est fermée.

Proposition 46

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.
- La réunion d'une famille **finie** de fermés est fermée.

Remarque: Une intersection quelconque de fermés n'est pas forcément fermée.

Proposition 47

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit $E_1 \times \dots \times E_p$ de la norme produit. Si $F_1, \dots, F_p$ sont fermés dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors $F_1 \times \dots \times F_p$ est fermé dans $E_1 \times \dots \times E_p$.

Exercice 48: Soit $d \geq 2$. Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^d$, et que C_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$:

- ① $A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + dx_d^2 = 1 \right\}.$
- ② C_f , la courbe de f , où $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 49: Montrer que la partie suivante est un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < f(x) \right\}, \quad \text{où } f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Voisinage

Définition 50

Soit V une partie de E et $a \in E$. On dit que V est un *voisinage* de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

Exemple 51: Tout ouvert contenant a est un voisinage de a .

Proposition 52

Soit $a \in E$ ainsi que V un voisinage de a . Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers a , alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in V.$$

Intérieur d'une partie

Intérieur d'une partie

Définition 53

On dit qu'un point x est intérieur à une partie $A \subset E$ si A est un voisinage de x , c'à d s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A ; on le note $\overset{\circ}{A}$ ou $\text{Int}(A)$.

Exemple 54:

- $\text{Int}(A) \subset A$.
- Si A est un ouvert, alors $\text{Int}(A) = A$.
- Si $A \subset B$, alors $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.

Proposition 55

L'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert qui soit inclus dans A .

Adhérence d'une partie

Adhérence d'une partie

Définition 56

On dit qu'un point x est *adhérent* à une partie $A \subset E$ si pour tout $r > 0$, on a

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé *adhérence* de A ; on le note $\overline{A}$ ou $\text{Adh}(A)$.

Exemple 57:

- $S \ A \subset \text{Adh}(A)$.
- Si F est un fermé, alors $F = \text{Adh}(F)$.
- $E \setminus \text{Adh}(A) = \text{Int}(E \setminus A)$.

Proposition 58

L'adhérence d'une partie A est le plus petit fermé contenant A .

Proposition 59

Un point x est adhérent à une partie A si, et seulement s'il existe une suite (a_n) de A qui converge vers x .

Exercice 60: Soit A une partie non vide d'un evn E . Montrer que:

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \text{Adh}(A).$$

Densité

Définition 61

Soit A une partie de E . Une partie D de A est dite *dense dans A* si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) l'adhérence de D contient A ;
- (ii) pour tout $a \in A$ et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x - a\| \leq r$;
- (iii) pour tout $a \in A$, il existe une suite (d_n) de D qui converge vers a .

Remarque: Une partie A est dense dans E si $\text{Adh}(A) = E$.

Exercice 62: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(K)$.

Frontière

Définition 63

Soit A une partie de E . La frontière de A , notée $\text{Fr}(A)$, est l'ensemble

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A),$$

Exemple 64:

- $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$ et $\text{Fr}(A)$ est un fermé.
- A et $E \setminus A$ ont la même frontière.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si I est un intervalle d'extrémités a et b , alors on a :

$$\text{Int}(I) =]a, b[, \quad \text{Adh}(I) = [a, b], \quad \text{Fr}(I) = \{a, b\}.$$

Limite d'une application

Limite d'une application

Soient E et F deux evn sur $\mathbb{K}$ et A une partie de E .

Définition 65

Soit $f : A \rightarrow F$ une application, ainsi que a un point adhérent à A et $\ell \in F$. On dit que f tend vers ℓ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 66

L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a , on a

$$f(u_n) \longrightarrow \ell.$$

Proposition 67

Si deux éléments ℓ_1 et ℓ_2 de F vérifient $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Définition 68

On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in F$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Cet unique élément ℓ s'appelle alors la limite de f en a et se note $\lim f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Définition 69

On dit que f est continue en $a \in A$ si f admet une limite en a qui vaut $f(a)$.

Proposition 70

Soit $f : A \rightarrow F$ une application. Supposons que A ne soit pas bornée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \|x\| \geq M \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors :

$$f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \ell.$$

Limite d'une application: Cas ou $x \rightarrow \pm\infty$

Pour une application définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on introduit la notion de limite en $-\infty$ et $+\infty$.

Pour une partie $A \subset \mathbb{R}$, on étend la définition de point adhérent de la manière suivante : On dit que $-\infty$ (respectivement $+\infty$) est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A tendant vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

On remarque que:

- $-\infty$ est adhérent à A si, et seulement si, A n'est pas minorée.
- $+\infty$ est adhérent à A si, et seulement si, A n'est pas majorée.

Définition 71

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow F$ une application et $\ell \in F$.

- Si $-\infty$ est adhérent à A , alors on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

- Si $+\infty$ est adhérent à A , alors on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq M \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 72

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow F$ une application, et $\ell \in F$.

- Si A est non minorée, alors f tend vers ℓ en $-\infty$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers $-\infty$, on a $f(u_n) \rightarrow \ell$.
- Si A est non majorée, alors f tend vers ℓ en $+\infty$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A tendant vers $+\infty$, on a $f(u_n) \rightarrow \ell$.

Application à valeurs dans un espace produit

Application à valeurs dans un espace produit

On considère p espaces vectoriels normés $E_1, E_2, \dots, E_p$, et l'on munit l'espace $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ de la norme produit.

Proposition 73

Si l'application $f : A \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p$ est à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_p$, et si $f_1, \dots, f_p$ désignent les applications composantes de f , alors f tend vers

$$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$$

en a , si, et seulement si, chacune des applications f_k tend vers ℓ_k en a :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad f_k(x) \rightarrow \ell_k \quad \text{quand } x \rightarrow a.$$

Prolongement par continuité

Définition 74

Si f possède une limite $\ell \in F$ en un point $a \in \bar{A} \setminus A$, alors l'application $\tilde{f} : A \cup \{a\} \longrightarrow F$ définie par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ \ell, & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue en a , et s'appelle le *prolongement de f par continuité en a* .

Exercice 75: Soit $X \subset A$ dense dans A , et $f : X \longrightarrow F$ une application continue en tout point de X . On suppose que f admet une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Montrer que f admet un prolongement $\tilde{f} : A \longrightarrow F$ continu en tout point de A .

Opérations sur les limites

Définition 76

Soient f_1 et f_2 deux applications de A dans F , ainsi que λ_1 et λ_2 deux scalaires. Si $f_1 \xrightarrow{a} \ell_1 \in F$ et $f_2 \xrightarrow{a} \ell_2 \in F$, alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \xrightarrow{a} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Proposition 77

Soit $f : A \rightarrow F$ telle que $f \xrightarrow{a} \ell \in F$, et soit $\varphi : A \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi \xrightarrow{a} \lambda \in \mathbb{K}$. Alors la fonction

$$(\varphi f) : A \longrightarrow F, \quad x \longmapsto \varphi(x) f(x)$$

tend vers $\lambda \ell$ en a .

Proposition 78

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction ne s'annulant pas. Si $f \xrightarrow{a} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors:

$$\frac{1}{f} \xrightarrow{a} \frac{1}{\ell}.$$

Proposition 79

Soient E , F et G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, ainsi que $A \subset E$ et $B \subset F$. Soient $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ deux applications, avec $f(A) \subset B$. Si $g \xrightarrow{b} \ell$, alors $g \circ f \xrightarrow{a} \ell$.

Opérations sur les applications continues

Proposition 80

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continu.
- La composée de deux applications continues est continue.

Exemple 81:

- L'application $x \mapsto \|x\|x$ est continue.
- Si f est continue, alors l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue.

Proposition 82

Si $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est une application continue ne s'annulant pas, alors $\frac{1}{f}$ est continue.

Application lipschitzienne

Definition 83

Soit $k > 0$. On dit que l'application f est k -lipschitzienne ou lipschitzienne de rapport k si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f soit k -lipschitzienne.

Proposition 84

Toute application lipschitzienne est continue.

Exemple 85:

- La norme est lipschitzienne.
- $A : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto d(x, A)$ est lipschitzienne.
- $E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_k, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_k$ est lipschitzienne.

Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue

Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue

Proposition 86

Étant donné $f : E \rightarrow F$ une application continue,

- l'image réciproque par f de tout fermé est fermée.
- l'image réciproque par f de tout ouvert est ouverte.

Exemple 87:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.